Zestaw nr 10.

Zadanie 10.1.

Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny o funkcji prawdopodobieństwa $P(k)=P(X=k)=2^{-k}$, $k\in N$. Zmienna losowa $Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$ może przyjąć jedną z trzech wartości: 0 dla $X=2n$, 1 dla $X=4n-3$, -1 dla $X=4n-1$; $n\in N$. Obliczyć: $P(Y=0)$, $P(Y=1)$, $P(Y=-1)$.

Zadanie 10.2.

Łączna gęstość wektora losowego w prostokątnym układzie współrzędnych ma postać:

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

Wyznaczyć łączną gęstość tego wektora we współrzędnych biegunowych: $x=r\cos(\varphi)$, $y=r\sin(\varphi)$; $0\le\varphi<2\pi$, $0\le r<\infty$. Wyznaczyć gęstości brzegowe $f_\Phi(\varphi)$ i $f_R(r)$. Czy zmienne losowe R i Φ są niezależne dla dowolnych $(r,\varphi)\in R^2$?

Zadanie 10.3.

Wiadomo, że łączna gęstość prawdopodobieństwa wektora (X,Y) ma postać:

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}4xy & :x\in(0,1)\wedge y\in(0,1)\\ 0 & :x\notin(0,1)\vee y\notin(0,1)\end{cases}.$$

Wyznaczyć łączną gęstość prawdopodobieństwa wektora (U,V), gdzie $U=X^2$, $V=Y^2$.

Zadanie 10.4.

Znaleźć kwantyl $\left(\chi_n^2\right)_p$ rzędu $p=0{,}95$ zmiennej losowej Y_n mającej rozkład χ^2 o $n=100$ stopniach swobody.

Zadanie 10.5.

Wiadomo, że kwantyl nieznanego rzędu p: $\left(\chi_n^2\right)_p=37{,}57$. Wykorzystując kwantyle rozkładu normalnego λ_p znaleźć rząd p kwantyla zmiennej losowej Y_n mającej rozkład χ^2 o $n=20$ stopniach swobody.

Zadanie 10.6.

Zmienna losowa T ma rozkład jednostajny w przedziale $[0,2\pi]$, tzn. jej gęstość $f_T(t)=\frac{1}{2\pi}$ dla $t\in[0,2\pi]$ i $f_T(t)=0$ dla $t\notin[0,2\pi]$. Rozpatrzmy dwie zmienne losowe $X=\cos(T)$, $Y=\cos(T+\varphi)$, przy czym $\varphi\in[0,2\pi]$. Obliczyć EX, EY oraz współczynnik korelacji ρ między zmiennymi X i Y.

Zadanie 10.7. (zadanie nadprogramowe, dla ambitnych).

Rozpatrzmy iloraz niezależnych zmiennych losowych X i Y takich, że X ma rozkład χ^2 o m stopniach swobody, a Y ma rozkład χ^2 o n stopniach swobody. Wykazać, że gęstość prawdopodobieństwa ilorazu $V=\frac{Y}{X}$, $X\neq 0$ dla $v>0$ wyraża wzór:

$$f(v)=\frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)}\cdot\frac{v^{\frac{n}{2}-1}}{(1+v)^{\frac{n+m}{2}}},$$ gdzie $B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)$ jest funkcją beta.

Zadanie 10.8.

Względny spadek trwałości obiektu odnowionego po jego awarii jest zmienną losową V o rozkładzie beta o parametrach: $n=2$, $m=4$ i gęstości prawdopodobieństwa: $f(v)=20\cdot v\cdot(1-v)^3$ dla $0<v<1$ oraz $f(v)=0$ dla $v<0\vee v>1$. Obliczyć EV oraz prawdopodobieństwo, że względny spadek trwałości będzie $\le 50\%$.

Prowadzący: Ireneusz Jóźwiak