Zestaw nr 3.

Zadanie 3.1.

Obliczyć A i B, aby funkcja $F(x)$ była dystrybuantą ciągłej zmiennej losowej X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & : x\in(-\infty,-1] \\ A+B\cdot\arcsin(x) & : x\in(-1,1) \\ 1 & : x\in[1,+\infty) \end{cases}.$$

Wyznaczyć gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej X. Wykreślić funkcje $F(x)$ i $f(x)$. Obliczyć prawdopodobieństwo przyjmowania przez zmienną losową X wartości z przedziału (0 ; 0,5).

Zadanie 3.2.

Obliczyć A, aby funkcja $f(x)$ była gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X: $f(x)=A\cdot e^{-|x|}$. Znaleźć dystrybuantę zmiennej losowej X. Wykreślić funkcje $F(x)$ i $f(x)$.

Zadanie 3.3.

Czas pracy [w setkach godzin] do chwili przepalenia się lampy elektronowej jest zmienną losową X o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}3\cdot\left(2+x-x^2\right) & : x\in(0,2] \\ 0 & : x\notin(0,2] \end{cases}.$$

Znaleźć dystrybuantę zmiennej losowej X. Narysować funkcje $f(x)$ i $F(x)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że lampa przepali się przed upływem 100 godzin oraz prawdopodobieństwo, że lampa przepali się między 50 a 100 godziną.

Zadanie 3.4.

Zmienna losowa X ma gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$ daną wzorem:

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x| & : |x|\le 1 \\ 0 & : |x|>1 \end{cases}.$$

Wyznaczyć dystrybuantę $F(x)$ zmiennej losowej X oraz podać wykres. Obliczyć $P\left(X>\frac{1}{2}\right)$.

Zadanie 3.5.

Zmienna losowa X ma dystrybuantę $F(x)$ daną wzorem:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & : x\in(-\infty,-1/2) \\ x+\frac{1}{2} & : x\in[-1/2,0] \\ \frac{1}{2} & : x\in(0,1/2) \\ x & : x\in[1/2,1] \\ 1 & : x\in(1,+\infty) \end{cases}.$$

Podać wykres funkcji $F(x)$. Wyznaczyć gęstość $f(x)$ tej zmiennej losowej. Obliczyć $P\left(|X|<\frac{3}{4}\right)$. Podać interpretację geometryczną obliczonego prawdopodobieństwa.

Prowadzący: Ireneusz Jóźwiak

Zadanie 3.6.

Rozpatrujemy rzuty kostką do gry. Zdarzeniu elementarnemu polegającemu na pojawieniu się jednej z liczb 1,2,...,6 przyporządkowujemy właśnie tą liczbę, która się pojawi. Zmienna losowa X może tu przybierać 6 wartości $x_i = i$ (i = 1, 3, 4, 5, 6) z jednakowym prawdopodobieństwem $P(X = x_i) = \frac{1}{6}$. Obliczyć :

- prawdopodobieństwo $P(X < x)$, jeżeli $x \in (-\infty,1]$,
- prawdopodobieństwo $P(X < x)$, jeżeli $x \in (1,2]$,
- prawdopodobieństwo $P(X < x)$, jeżeli $x \in (2,3]$,
- prawdopodobieństwo $P(X < x)$, jeżeli $x \in (3,4]$,
- prawdopodobieństwo $P(X < x)$, jeżeli $x \in (4,5]$,
- prawdopodobieństwo $P(X < x)$, jeżeli $x \in (5,6]$,
- prawdopodobieństwo $P(X < x)$, jeżeli $x \in (6,+\infty)$.

Sporządź wykres funkcji $P(X < x)$ jako funkcji zmiennej x.

Zadanie 3.7.

Na zbiorze liczb rzeczywistych określamy funkcję gęstości w sposób następujący:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & : x \in (0,2) \\ 0 & : x \notin (0,2) \end{cases}$$

Znaleźć dystrybuantę zmiennej losowej X i narysować jej wykres.

Prowadzący: Ireneusz Jóźwiak