Zestaw nr 4.

Zadanie 4.1.

Rezystancja obwodu elektrycznego jest zmienną losową o gęstości prawdopodobieństwa $f_R(r)$, natomiast napięcie U ma rozkład o gęstości prawdopodobieństwa $f_U(u)$:

$$f_R(r)=\begin{cases}\frac{1}{r_0} & : r\in\left(0,r_0\right]\\ 0 & : r\notin\left(0,r_0\right]\end{cases},\qquad f_U(u)=\begin{cases}0 & : u\le 0\\ \lambda\cdot e^{-\lambda u} & : u>0;\lambda>0\end{cases}$$

Znaleźć łączną gęstość prawdopodobieństwa wektora (R,U), dystrybuanty brzegowe $F_R(r)$ i $F_U(u)$, dystrybuantę łączną $F(r,u)$ i pokazać, że $F(r,u)=F_R(r)\cdot F_U(u)$.

Zadanie 4.2.

Przy przepływie prądu przez przewodnik o rezystancji R następuje zamiana energii elektrycznej na cieplną zgodnie z zależnością: $A=\frac{u^2 t}{R}$, gdzie u oznacza przyłożone napięcie, a t czas. Niech $\frac{t}{R}=c=1{,}5\cdot I\cdot V^{-2}$. Przypuśćmy, że napięcie jest zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa określonym przez gęstość

$$f(u)=\begin{cases}\frac{u-200}{300} & : u\in\left[200,220\right]\\ \frac{230-u}{150} & : u\in\left(220,230\right]\\ 0 & : u\notin\left[200,230\right]\end{cases}$$

Obliczyć prawdopodobieństwo, że energia elektryczna zamieniona na energię cieplną przyjmuje jedną z wartości z przedziału $(71000,74000)$.

Zadanie 4.3.

Zmienna losowa X typu skokowego ma następujący zbiór punktów skokowych: $S_X=\{-2,-1,0,1,2\}$, które przyjmuje z następującymi prawdopodobieństwami: $P(X=-2)=P(X=2)=p$, $P(X=-1)=P(X=1)=P(X=0)=2\cdot p$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y=X^2$.

Zadanie 4.4.

Rzucamy dwiema kostkami sześciennymi: czerwoną i zieloną. Określmy dwie zmienne losowe X i Y w następujący sposób: X - liczba oczek na kostce czerwonej, Y - {1- gdy na kostce zielonej jest parzysta liczba oczek, 2- gdy na kostce zielonej jest nieparzysta liczba oczek}. Niech $Z=X+Y$, $U=X\cdot Y$. Obliczyć $P(Z>6)$ oraz prawdopodobieństwo tego, że U przyjmuje jako wartość liczbę nieparzystą.

Zadanie 4.5.

Liczba niezbędnych regulacji pewnego automatu w ciągu jednej zmiany jest zmienną losową o rozkładzie przedstawionym w tablicy:

Liczba regulacji	0	1	2	3	4	5 i więcej
Prawdopodobieństwo	0,15	0,68	0,12	0,04	0,01	0,00

Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe liczby niezbędnych regulacji.

Prowadzący: Ireneusz Jóźwiak

Zadanie 4.6.

Rozpatrzmy trzy przykłady zmiennych losowych przyjmujących przeliczalnie wiele wartości.

a) Zmienna losowa X_1 przyjmuje wartości: $1,2,\ldots,i,\ldots$ odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_i = P(X_1 = i) = 2^{-i}$, $i = 1,2,\ldots$;

b) Zmienna losowa X_2 przyjmuje wartości: $2,2^2,\ldots,2^i,\ldots$ z prawdopodobieństwami $p_i = P\left(X_2 = 2^i\right) = 2^i$, $i = 1,2,\ldots$

c) Zmienna losowa X_3 przyjmuje wartości: $2,-2^2,2^3,-2^4,\ldots,(-1)^{i+1}\cdot 2^i,\ldots$ z prawdopodobieństwami $p_i = P\left(X_3 = (-1)^{i+1}\cdot 2^i\right) = 2^{-i}$, $i = 1,2,\ldots$.

Obliczyć wartości oczekiwane powyższych zmiennych losowych.

Zadanie 4.7.

Prędkość cząsteczki gazu jest zmienną losową V o rozkładzie Maxwella:

$$f_V(v) = \begin{cases} 0 & : v \le 0 \\ A\cdot v^2 \cdot e^{-h^2v^2} & : v > 0 \end{cases}, \qquad \text{gdzie } A = \frac{4h^2}{\sqrt{\pi}}.$$

Obliczyć wartość oczekiwaną prędkości cząsteczki.

Zadanie 4.8.

Wykazać, że jeżeli istnieją wartości oczekiwane $E(X)$ i $E(Y)$ zmiennych losowych X i Y niezależnych i typu ciągłego, to $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Zadanie 4.9.

Udowodnić, że jeżeli zmienne losowe X i Y są niezależne, to $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$.

Zadanie 4.10.

Cząsteczka wykonuje ruch harmoniczny po linii prostej o amplitudzie równej jeden i o okresie T_0. Chwilę T wybraną losowo z przedziału $[0, T_0]$ możemy uważać za zmienną losową o rozkładzie:

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & : t \in (-\infty,0) \cup (T_0,+\infty) \\ \dfrac{1}{T_0} & : t \in [0, T_0] \end{cases}$$

Obliczyć:

a) wartość oczekiwaną $E(X)$ zmiennej losowej $X = \sin\left(\dfrac{2\pi\cdot T}{T_0}\right)$ określającej położenie cząsteczki na osi;

b) moduł prędkości cząsteczki i jego wartość oczekiwaną;

c) energię kinetyczną cząsteczki (przy założeniu, że jej masa jest jednostkowa) i jej wartość oczekiwaną.