Zestaw nr 5.

Zadanie 5.1.

Wyprodukowane wkręty pakuje się w pudełeczka. Z uwagi na drobne odchylenia ilościowe, liczbę wkrętów w pudełeczku możemy uważać za zmienną losową X. Znana jest wartość oczekiwana tej zmiennej $EX = 200$ sztuk oraz standardowe odchylenie $\sigma_X = 2{,}8$ sztuk. Obliczyć wartość oczekiwaną oraz standardowe odchylenie liczby wkrętów w $n = 100$ opakowaniach. Obliczyć współczynnik zmienności dla jednego opakowania, a także dla 100 opakowań.

Zadanie 5.2.

Wektor losowy ma łączną gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & : x \in (0,1) \wedge y \in (0,1) \\ 0 & : x \notin (0,1) \vee y \notin (0,1) \end{cases}.$$

Obliczyć momenty zwyczajne i momenty centralne pierwszego i drugiego rzędu.

Zadanie 5.3.

Zmienna losowa X ma rozkład normalny o gęstości określonej wzorem: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Znaleźć punkt x_p, dla którego spełniona jest równość: $F(x_p) = p$, dla p = 0,1; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9; 0,95. Należy nauczyć się korzystania z tablicy III rozkładu normalnego z książki M. Fisza.

Zadanie 5.4.

Zmienna losowa X może przybierać wartości 0 i 1, przy czym $P(X = 0) = \frac{1}{5}$, $P(X = 1) = \frac{4}{5}$. Wykazać, że medianą jest punkt $x = 1$. Narysować funkcję $P(X < x)$.

Zadanie 5.5.

Zmienna losowa X jest typu ciągłego o gęstości określonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & : x \in [0, \pi/2] \\ 0 & : x \notin [0, \pi/2] \end{cases}.$$

Obliczyć medianę zmiennej losowej X.

Zadanie 5.6.

Zmienna losowa X może przybierać trzy wartości: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ z prawdopodobieństwami: $P(X = -1) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Narysować dystrybuantę tego rozkładu. Wykazać, że każda wartość x z przedziału $[0,1]$ jest tu medianą.

Zadanie 5.7.

Zmienna losowa ma rozkład jednostajny o gęstości prawdopodobieństwa określonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x < a \vee x > b \\ \frac{1}{b-a} & : a < x < b \end{cases},$$

gdzie $a, b \in R; a < b$. Obliczyć funkcję charakterystyczną.

Zadanie 5.8.

Udowodnić, że jeżeli funkcja charakterystyczna $\varphi(t)$ zmiennej losowej X jest różniczkowalna k-krotnie, to jej k-ty moment m_k wyraża się wzorem: $m_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}$.

Zadanie 5.9.

Dana jest funkcja $\varphi(t) = e^{-|t|}$. Zbadać, czy istnieje rozkład, którego byłaby to funkcja charakterystyczna.

Prowadzący: Ireneusz Jóźwiak