Zestaw nr 8.

Zadanie 8.1.

Znaleźć dopuszczalną intensywność uszkodzeń nieodnawialnego obiektu, którego czas pracy do uszkodzenia ma rozkład wykładniczy, jeżeli niezawodność jego w ciągu $100h$ ma wynosić co najmniej $0{,}99$.

Zadanie 8.2.

Czas zdatności pewnego obiektu jest zmienna losową o rozkładzie Rayleigha $(\alpha = 2)$ z parametrem $\beta = 5 \cdot 10^{-7}$. Wyznaczyć funkcję niezawodności tego obiektu, gęstość prawdopodobieństwa oraz obliczyć niezawodność obiektu dla $500h$ i $1000h$.

Zadanie 8.3.

Urządzenie z jednym nieobciążonym elementem rezerwowym pracuje do chwili uszkodzenia się elementu rezerwowego. Czas pracy urządzenia do uszkodzenia ma rozkład gamma o parametrach $\alpha = 2$ i λ. Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa, dustrybuantę i funkcję niezawodności urządzenia dla $x \ge 0$. Wykreślić funkcję niezawodności $R(x)$ oraz wyznaczyć przedział, w którym funkcja $R(x)$ jest wypukła w górę, wklęsła w dół, a także wyznaczyć punkt przegięcia. Obliczyć funkcję intensywności uszkodzeń.

Zadanie 8.4.

Dla rozkładu gamma wyznaczyć współczynnik zmienności, współczynnik asymetrii i współczynnik spłaszczenia.

Zadanie 8.5.

Czas jednej obsługi półautomatycznej obrabiarki reprezentowany jest przez zmienną losową o rozkładzie wykładniczym. Średni czas jednej obsługi wynosi $20min$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że czas losowo wybranej obsługi przekroczy pół godziny.

Zadanie 8.6.

Wykazać, że dla zmiennej losowej o rozkładzie Cauchy'ego nie istnieje wartość oczekiwana.

Zadanie 8.7.

Dana jest łączna gęstość prawdopodobieństwa $f(x,y) = \left[\pi^2\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\right]^{-1}$ wektora losowego (X,Y). Oblicz brzegowe gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$ i $f_Y(y)$ oraz warunkową gęstość prawdopodobieństwa. Czy składowe wektora losowego są zmiennymi losowymi niezależnymi?

Zadanie 8.8.

Wykazać, że kowariancja zmiennych losowych X i Y spełnia równość:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Zadanie 8.9.

Wykazać, że współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y rozumiany jako kowariancja odpowiadających im zmiennych losowych standaryzowanych jest równa:

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Zadanie 8.10.

Wykazać, że $\operatorname{cov}(X,X) = D^2(X)$.